



[数学分析] 友好的 复分析导读 I

引言

许久不见，漫长又转瞬即逝的一个月，大家又变强了多少呢？

在无趣的应试和各种烦人事中，我决定用空闲时间换个心情写复分析了。

复分析 (Complex Analysis) 是数学分析的分支，主要研究复数函数的性质，例如解析性、积分、级数等，以及它们在物理、工程、计算机科学等领域中的应用。本文内容的顺序会贴合一般复分析学习的大纲，偶尔掺杂点个人的浅见和理解。

这不是笔记，干干货不好说，也不是为了某些想速成而应试的笨蛋写的。我并不要严格将内容限于，那种无异于教材注解的刻板的主线，所以请允许我偶尔放飞自我地联系其他数学分支甚至学科的内容。

本文的内容难度以读者了解直到初中阶段学习的数学概念为标准。

复数

虚数和复数

初中生记忆中最接近复数的知识点和一元二次方程有关，每次特别强调“方程没有**实数根**”的时候就总想画蛇添足，但我忍住了。一个一元二次方程形如：

$$ar^2 + br + c = 0$$

以前老师都教过“一元二次方程根的判别式”，表示为 $\Delta = b^2 - 4ac$ ，然后会分成以下三种情况讨论：

- 若 $\Delta > 0$ 则方程有两个实数根 $r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- 若 $\Delta = 0$ 则方程有一个实数根 $r = \frac{-b}{2a}$
- 若 $\Delta < 0$ 则方程无实数根

最后一种情况，既然是“无实数根”这样强调，那就说明还有点什么，刚学这个的时候老师还微笑着随口一问“那你们知道实数之外的是什么呢？”，可惜初二的时候我的数学知识范畴仅限于应试，只知道按“实”的对立面蒙“虚数”。装x心有余而力不足

我们知道在实数的范畴考虑，负数没法开根号，所以为了完善数系，人们多发明了个 $\sqrt{-1} = \pm i$ ，就是所谓“虚数”，但是很不实际，就好比那个根的判别式，在几何意义上 $\Delta < 0$ 时就不应该有解。所以我们也一般在印象里将其抽象地当着一个“介于实际存在和不存在之间的、虚幻的数”。有了 i ， $\Delta < 0$ 的情况下，方程的解就可以形如：

$$\begin{aligned}r_1 &= \alpha + i\beta \\r_2 &= \alpha - i\beta\end{aligned}$$

此时方程的解是复数且它们是共轭的（稍后解释）。

一个复数形如：

$$z = a + bi$$

这里的 a, b 都是实数，而 a 被称为复数的实部， b 被称为复数的虚部。在这样的定义下，有时我们也会将实部表示为 $\Re(z)$ 或 $\text{Re}(z)$ ，虚部表示为 $\Im(z)$ 或 $\text{Im}(z)$ ，于是：

$$z = \Re(z) + i\Im(z)$$

我们可以将实数理解为虚部为零的复数，也因此复数集 $\mathbb{C}$ 是包含 $\mathbb{R}$ 的。

复数的运算

在与原本的实数域兼容的情况下，我们定义复数的运算，考虑复数 $z_1 = a_1 + b_1i$ 和 $z_2 = a_2 + b_2i$ ：

- $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$
- $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + b_1a_2)$

并且复数满足加法/乘法结合率和交换律、乘法分配率；复数的加法和乘法具有单位元和其逆元。

与实数不同的是，复数之间定义不了全序关系。如果要使得复数满足全序关系要求，则对于任意 $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ 都要满足：

- 若 $z_1 \leq z_2$ ，则 $z_1 + z_3 \leq z_2 + z_3$ (1)
- 若 $z_1 \leq z_2$ 且 $z_3 > 0$ ，则 $z_1z_3 \leq z_2z_3$ (2)

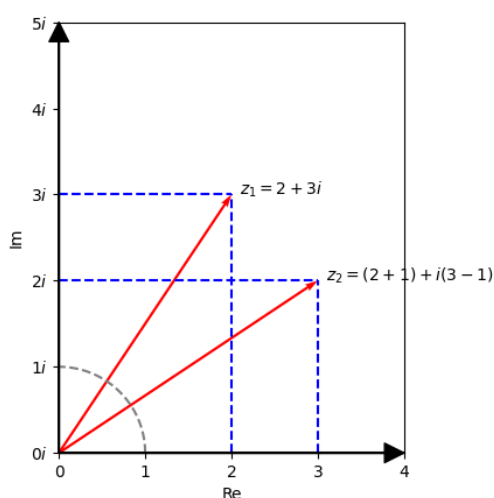
我们以虚数单位 i 为例，要能定义全序关系，则必定在 $i > 0$ 、 $i < 0$ 或 $i = 0$ 中有一个成立，已知 $i \neq 0$ 。

- 若 $i > 0$, 根据 (2), 则 $i^2 > 0$ 必须成立, 但是 $-1 > 0$ 是不成立的。
- 若 $i < 0$, 则意味着 $-i > 0$, 根据 (2), 则 $(-i)^2 > 0$ 必须成立, 但是这等同于 $-1 > 0$, 也是不成立的。

因此我们不能像在实数域一样任意地对复数域中的数比较大小。

复平面

要考虑复数的几何表示和意义, 就得建立一个适用的平面。



任何一个复数 $z = a + bi$, 都可以用一个有序数对 (a, b) 唯一确定, 因此我们可以建立复数集与平面直角坐标系中的点——对应, 这些点组成的集合我们称之为平面点集, 或者点集。在此基础上, 我们一般将横坐标称为实轴, 将纵坐标称为虚轴, 显而易见的是, 除了原点以外, 虚轴的点表示的是虚数。之后我们的 $z(a, b)$ 表达等价于 $z = a + bi$ 。

此外, 用向量表示复数会很利于我们理解复数运算 (如图), 复数的加法可以理解成是按照向量的平行四边形法则来进行的。向量 $\mathbf{z}$ 的长度被称为复数 z 的模, 定义为:

$$r = |\mathbf{z}| = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$$

对所有的 z, w , 有性质:

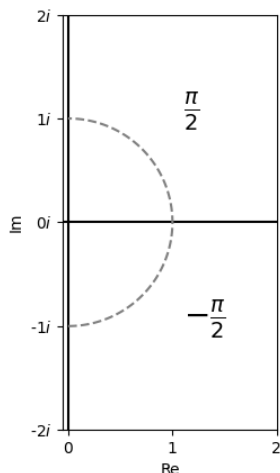
- $|z| - |w| \leq |z + w| \leq |z| + |w|$
- $|zw| = |z||w|$
- $\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$

以及，我们还能用三角坐标表示复数。若在图像中向量与实轴的夹角记为 $\theta = \arg z$ ，我们称之为复数 z 的辐角。如图，有向角的方向默认为逆时针，图中的 i 的辐角为 $\frac{\pi}{2}$ 而 $-i$ 的辐角则相反。

任何非零复数都有无穷多个辐角，这些值之间相差 2π 的整数倍，定义为 $\{\theta + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ，我们经常会约定满足 $-\pi < \theta \leq \pi$ 的辐角为 θ 的主值（有时也会被约定为 $0 < \theta \leq 2\pi$ ，主要就是这两种）。由于：

$$\begin{cases} a = r \cos \theta \\ b = r \sin \theta \end{cases}$$

我们可以将复数表示为 $z = a + bi = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ，这种我们称之为三角形式或者极坐标形式，其中 $\cos \theta + i \sin \theta$ 有时会被简写为 $\text{cis } \theta$ 。（但是Latex貌似没有默认的 cis 公式，这会有点麻烦，我之后可能会避免使用这种记法）



欧拉公式

在数学和物理中有一个非常重要的公式，就是被称为“上帝公式”的欧拉公式：

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

很多书和文档上所说的，欧拉公式的“推导”，例如将两边自然指数和三角函数分别用泰勒级数展开得到结论，严格来说只能算是验证而不是推导。篇幅有限，不能更详略不当了，所以我大概扯一下我关于欧拉公式的一些肤浅的理解就好

先前我在网络上看见很多以物理的应用引入这概念的，对于一个物理差的人而言这真头疼。而关于欧拉公式深入的解释和讨论，如果有闲的一天我再专门写。

以下内容很颠，是在放学路上用手机打的，看不懂直接跳吧

我们考虑单位圆，即以原点为圆心、半径为1的圆，所以此时我们的这个复数的极坐标形式（与实轴的夹角为 x ）就变成了：

$$y = \cos \theta + i \sin \theta$$

注意到，当我们用 i 来与一个复数相乘时，表示在复平面的向量会逆时针旋转90度，这个 $r = i$ 在旋转上的意义会与之相关。欧拉公式带来的结论，是取复数 e^{ix} 在复平面上旋转画出的轨迹正是单位圆上的点。所以我们关心的实质就是一个模为1的复数。

在旋转的过程中，向量的模不变，变的是我们关注的角 x 和随角度变化的向量 y ，在此处建立一个函数关系，概念就模糊不清地出现了。此时 y 的实部是 $\cos x$ ，虚部是 $i \sin x$ 。 y 继续旋转，在极短的时间内旋转所变化的量（导数的概念），此时变化的点表示的复数我们记做 $y' = \frac{dy}{dx}$ ，则它们的差值相当于 y 逆时针旋转了90度，也就是乘了个 i 。（我们可以轻易脑补出原本的 y 和已经旋转了一段距离的 y' ，并考虑表示它们的差值的向量 $\bar{y}$ ，是垂直于 a 的）

于是就有了下面这个微分方程，并且我们可以将 $(0, 1)$ 带入（过程略，反正简单推几步就出来了）：

$$\frac{dy}{dx} = iy = i(\cos \theta + i \sin \theta)$$

共轭

共轭 (Conjugate) 的『轭』来自古代给牛两两并排拉车的木头，在数学中有“成对”的意思，意义上是“耦合的、一体的”，而在某些特性上会相反。在数学中我们有常见的复共轭、共轭类（Group Theory 相关的），在化学中也有什么共轭酸碱对，其根本的意思都是这样。

此概念在复数的研究中，是指对复数的虚部变号得到的复数，一对实部相同而虚部相反的复数被称为“共轭复数”。

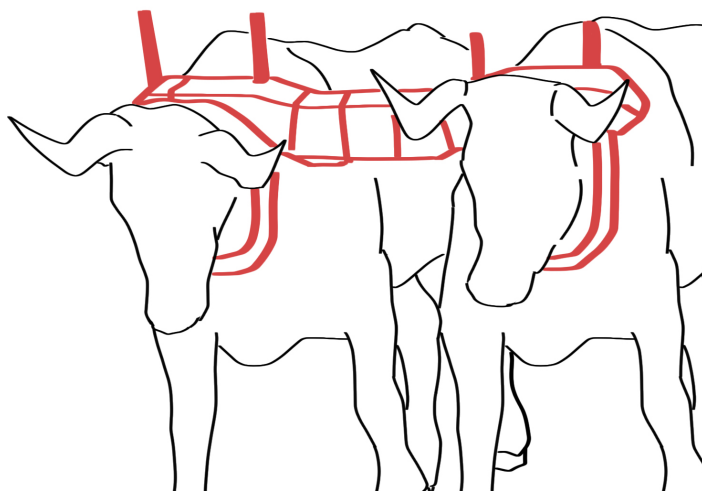
考虑复数 $z = a + bi$ ，则 z 的共轭为：

$$\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$$

不难想象，如果在复平面中以向量来表示，则它们是关于实轴对称的——这也意味着实数的共轭是其自身。

此处列举一些最基础的，进行简单的推导就可适用于很多情况的性质：

- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 \times z_2} = \bar{z}_1 \times \bar{z}_2$
- $|z| = |\bar{z}|$
- $n \in \mathbb{Z}, \overline{z^n} = \bar{z}^n$



不喜欢实物图影响整体风格，所以本鼠标PS灵魂画手出动了（我尽力了啊哈哈哈哈）

黎曼球面

黎曼球面可以被看作是复平面的扩充。我们将复平面上的每个点映射到三维空间中的单位球面上，在这个映射中，复平面上的无穷远点 ∞ 被映射到球面的北极点，得到的球面就被称为黎曼球面（或复球面），就是个更形象的 $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 。紧致化复平面对我们后续的性质研究很重要。

当我们给以复平面原点 O 为球心的黎曼球面建立笛卡尔坐标系，在三维空间中的单位球面上，对于球面上的每个点 (X, Y, Z) ，都有 $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ ，此时的北极坐标为 $(0, 0, 1)$ 。强调，相比有两个无穷远点的扩充实数轴 $\overline{\mathbb{R}}$ ，扩充复平面只有北极一个点是无穷远点。

在我们对数轴和普通复平面的认知下，一个数除以零是没有定义的，但是我们在黎曼球面却可以做到这点。我们在扩充实数轴上不能定义除以零，是因为正无穷和负无穷在数轴的两侧，而我们做不到到将正无穷和负无穷定义为同一个普通点并“收紧”。而在黎曼球面中，从几何上容易想象，在球面的一个点离平面越远，则其投影就越靠近北极，随着点在平面上向无穷远移动，投影也趋近于北极。非零的数除以零可以理解为数无限趋近于无穷远点，因此取极限，任何非零的数除以零都是无穷大的。

代数几何角度

另外可以简单提提黎曼球面在其他数学分支的地位。复射影空间指复数平面加上一个无穷远点形成的拓扑空间。黎曼球面是紧致的一维复射影空间（一维时也称复射影直线），符号表示为 $\mathbb{CP}^1$ 。众所周知，当我们形容一个东西是“紧致的”，往往是在强调它是一个好东西，数学也不例外。此外，黎曼球面还是一个典型的黎曼曲面，更是一个复一维紧致曲面，具有很多很棒很棒的拓扑性质。

复代数簇可以由一组多项式方程定义，在一维复射影空间的情况下，我们可以考虑使用球面的方程来定义它。球面上的点 (x, y, z) 满足方程 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ，也就是说黎曼球面是一个一维的复代数簇。

在代数几何和射影几何等领域，黎曼球面经常作为各一个典型的、直观的各种概念的例子出现，对我们后续的深入学习很有帮助。

复解析函数 - 概论

解析函数这个概念本身可以再被细分为实解析函数（一般我们会说“无穷可微”而非解析）和复解析函数，它们有很多很重要的性质，后者是在复分析领域的（可以说是最重要的）研究对象。

在第一章，我们已经大致了解了作为基础的复数和复平面，现在，我们美好的复分析之旅就从此开始辣！

复函数及其极限

复函数（亦称复变函数，意思是等价的，我随着语感写）是以复数作为自变量和因变量的函数，其值域与定义域都是复平面的子集，先定义：

考虑 $E \subseteq \mathbb{C}$ ，我们将映射 $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ 称为 E 上的复变函数，可以将它视为两个二元实函数，写成如下形式：

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

我们经常要将复函数转化为实函数来研究其性质，例如我们可以将函数 $f(z) = z^2 + 1$ 转为一对实函数：

$$z = x + yi$$

$$f(z) = z^2 + 1 = (x^2 + y^2 + 1) + i2xy$$

得到 $u = x^2 + y^2 + 1$, $v = 2xy$ 。

若 $\forall z \in E$ 都有唯一确定的复数 $w = f(z)$ 与之对应，则我们称 w 是在 E 确定的单值函数 $w = f(z) (z \in E)$ ，否则我们就称 w 是在 E 确定的多值函数 $w = f(z) (z \in E)$ 。常见的单值函数包括多项式函数、指数函数、三角函数等，而多值函数最常见的可能是幂函数和对数函数。

实变函数的极限定义与简单的一元实变函数的定义很相似。考虑在 E 上定义 $w = f(z)$ ，对于任何 $\varepsilon > 0$ 都存在 $\delta > 0$ 使得当 $|z - z_0| < \delta$ 时，有 $|f(z) - L| < \varepsilon$ ，则我们称函数 f 沿 E 有极限 L ，记为：

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f = L$$

前面说到了复变函数可以写为二元实函数的形式，因此我们可以将复变函数的极限问题转化为二元实函数的极限问题。 z 趋向于某一复数 $z_0 = x_0 + iy_0$ 当且仅当其实二元函数 $u(x, y)$, $v(x, y)$ 均在 (x_0, y_0) 处连续。

复可微与解析函数

若在 E 上的函数 $w = f(z)$ 在点 $z_0 \in E$ 的领域有定义且存在有限的极限：

$$\lim_{\Delta z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

则我们称 $f(z)$ 在 z_0 处可导，这个极限亦被我们称为导数，可以记为：

$$\Delta z = z - z_0$$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

显然，若 $f(z)$ 在 z_0 处可导，则 $f(z)$ 在 z_0 处是连续的。

当一个函数在 z_0 处及其邻域 $B(z_0, \delta)$ 内处处可导，则我们称 $f(z)$ 在 z_0 处解析（但是要注意，我们所说的解析指的是函数在一个区域上的性质，而非某个点）。解析的范围也可以是指一个区间等更大的范围，反正就是指一个在区域上处处可导的函数，若函数在某点解析，则一定在该点可导，反过来未必成立。

将范围扩大到定义域来说，对于复函数 $f(z)$ ，若在定义域 $E \in \mathbb{C}$ 上的每一点 z_0 及其领域内存在连续的导函数 $f'(z_0)$ ，则我们称 $f(z)$ 是在 E 上的解析函数（亦称**全纯函数**），这性质意味着该函数在此定义域处处可微。

柯西-黎曼方程

再来说说复分析中最基础也最重要的公式之一——柯西-黎曼方程（Cauchy-Riemann equations, CRE），提供了可微函数在定义域中为解析函数的充要条件。

考虑在定义域 E 上的函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 和复数 $z = x + iy$ ，柯西方程如下：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

我们说函数 f 在 E 中的点 z 可微当且仅当它在 z 处满足柯西-黎曼方程。而 f 在 E 上解析，也当且仅当它们满足柯西-黎曼方程。

很多时候为了使得在圆周或者环形区域内的边值问题更容易处理，我们还会考虑使用极坐标形式的 CRE。对于复数 $z = re^{i\theta}$ ，在极坐标形式 $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ ，柯西-黎曼方程亦可以以极坐标形式表示：

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}$$

CRE 还意味着一个显而易见的重点，即可导复函数的实部和虚部不是相互独立的，它们之间有联系。

级数理论

复函数的级数理论算是复分析里最基础也最重要的部分之一，在我们之后研究解析函数、亚纯函数和黎曼曲面等方面会发挥很重要的作用。

复数项级数

复级数的定义和性质与实级数类似，给定一个复数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ ，则一个复数项级数的形如：

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 \dots + z_n + \dots$$

复数列的前 n 项的和 S_n 被称作级数的部分和。

类似地，复数项级数也有收敛性和发散性，若部分和数列极限不存在，则我们称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 发散。考虑 $z_n = x_n + iy_n$, $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ ，我们称 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 为实部级数、 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 为虚部级数，若实部级数和虚部级数分别收敛到某个 x 和 y ，那么 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛到 $x + iy$ 。

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 收敛，则我们称 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛。

复数项级数满足线性组合的性质，即如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 都收敛，则 $\sum_{n=0}^{\infty} (ka_n + b_n)$ 也收敛，其中 k 是任意复数。

复数项级数的收敛性和性质与实数项级数类似，可以通过收敛性的判别法来确定级数是否收敛（也称之为审敛法），例如比较审敛法、比值审敛法、根值审敛法等。继续之前的定义，此处列举一些最基本的，考虑两个级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ ，其中我们要判断收敛性的是 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 。

- **比较审敛法**： $|u_n| \leq v_n$ ，若 $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 也收敛。
- **比值审敛法（达朗贝尔判别法）**：设 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$ ，若：
 - $\rho < 1$ ，则级数绝对收敛
 - $\rho > 1$ 或 $\rho = \infty$ ，则级数发散
 - $\rho = 1$ 时级数可能收敛亦可能发散，我们需要用其他方法加以判断。
- **根值审敛法（柯西审敛法）**：设级数根值为 $r = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|}$ ，若：
 - $r < 1$ ，则级数绝对收敛

- $r > 1$ 或 $r = \infty$, 则级数发散
- $r = 1$ 时级数可能收敛亦可能发散, 我们需要用其他方法加以判断。

复函数项级数

同理, 复函数项级数也与实函数项级数是类似的。给定复函数列 $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$, 且函数的定义域互不相交, 定义它们的交集为 D , D 是级数的定义域, 复函数项级数形如:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + f_3(z) + \dots + f_n(z) + \dots$$

复函数列的前 n 项的和 S_n 被称作级数的部分和。

对于复函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, 其定义域 D 内的各个点 z , 任意的 $\varepsilon > 0$ 都有对应的 N_z 使得当 $n > N_z$, 考虑任意正整数 p 有:

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+p} f_i(z) \right| < \varepsilon$$

则我们说该复函数项级数是收敛的。此外如果还存在一个自然数 N (与 z 无关的) 对于 D 内每个 z 均满足当 $n > N$ 时, 任意正整数 p 都有 $\left| \sum_{i=n+1}^{n+p} f_i(z) \right| < \varepsilon$, 则这个级数还是一致收敛的。

定义比较乱, 意思却很简单, 就是说在每个点 z 处, 级数的部分和都能足够接近于零, 且在整个定义域 D 内都具有相同的性质, 即对于所有 z 都足够接近于零。

魏尔施特拉斯判别法

对于函数项级数, 有一种思路类似于前面比较审敛法的判断是否收敛的方法叫做 魏尔施特拉斯判别法 (Weierstrass M-test / Weierstraßsches Majorantenkriterium, 来体验一下德语的魅力), 中文有简称 "M 判别法"。

考虑函数序列 $\{f_n(z)\}$ 与其定义域 D , 和正常数 M_n 使得:

$$|f_n(z)| \leq M_n$$

对于 $n \geq 1$ 和 D 内所有的 z , 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 内一致收敛。

魏尔施特拉斯判别法的核心思想在于, 在函数序列 f_n 随着 n 的增大逐渐趋于某个极限函数 $f(z)$ 的同

时，我们要求每个点 x 处的函数序列都被一个相同的上界 M 所控制，即函数序列的绝对值不会超过某个常数，由此判断一致收敛性。

复幂级数

有一种常见的特殊复函数项级数，被称为复幂级数，因为有不同于一般的复函数项级数的收敛性判别方法和更好的性质，所以单独讨论。

考虑复数 z_0, c_n ，复幂级数形如：

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

我们称之为以 z_0 为中心的复幂级数。对于 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ ，其收敛半径是指复幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在复平面上收敛的半径范围，如果存在 $R > 0$ ，使得级数在以 z_n 为中心、半径为 R 的圆盘 $|z| < R$ 内绝对收敛，并且在圆周 $|z| = R$ 上发散，则称 R 为该级数的收敛半径。而使复幂级数收敛的域则被称为收敛圆，幂级数在其收敛圆内是解析函数。

特别地，当 $z_0 = 0$ ，即以 0 为中心的复幂级数，即：

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

被称为麦克劳林级数。

解析函数与级数展开

本节的内容可能需要引入复积分相关的概念才能深入讨论，而复积分我还没写到，此处仅介绍公式，学有余力的/有基础/很好奇的读者也是可以看的。

解析函数是可以通过无穷级数展开的函数，并且这个级数在函数定义域内收敛于该函数，因此我们也会称这个级数为收敛幂级数。其性质在后面的研究很重要。

公式用起来还是很简单的，所谓“超纲”主要在解释其来头需要用到复积分相关的定理，本文的本段内容仅做简单介绍，日后会在合适的地方做详细的解释。**本节不应该出现在这里，所以在复分析 P1 和 P2 的合并版本会被完善并扔到章节“复积分”之后（见文末说明）**

Taylor 展开

现在我们已经知道了，幂级数在一个所谓收敛圆内是一个解析函数，因此我们要考虑如何将函数展开为复幂级数。我们将能够被表示为幂级数形式的函数称为解析形的函数。

注：此概念在实数和复数都是适用的，但是此处为了符合主题而使用“解析”来形容一个函数，而非在基础的高等数学中我们更常用于形容实函数的“无穷可微”。

在实变函数论中，我们讨论泰勒公式的初衷是用于一个在定义域内无穷可微的实函数的泰勒级数的部分和逼近某个点。类似地，在这里我们需要的也是一个泰勒级数。对于一个在实数/复数 a 的邻域上的解析的实函数/复函数，它的泰勒级数的形式如下：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

根据复幂函数的性质，考虑在 D 内的解析函数 $f(z)$ ，对于 $z_0 \in D$ 有开圆 $O = \{z : |z - z_0| < R, R > 0\} \in D$ ，则函数在 O 上有唯一展开式：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

其中的泰勒系数 c_n 如下，现阶段的读者可以理解此处的 C 是以 z_0 为中心、任意小的正向闭曲线，整个路径都在区域 D 内，定义为 $|z - z_0| < R - \varepsilon, \varepsilon > 0$ 。而积分符号表示沿着路径 C 对被积函数进行积分。

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

到这里差不多得了，反过来说，一个函数在 D 解析的充要条件就是它在 D 中的点均有其泰勒展开式。

Laurent 展开

洛朗级数是一种在复平面上的某个环形区域内展开的级数，它同时包括了正幂次和负幂次的项。洛朗级数的收敛域通常是一个环状的区域，称为洛朗展开的收敛环。它在收敛环的两个边界上都可以收敛，这种同时在其收敛域的两个边界上收敛的级数，我们称之为双边幂级数。

洛朗级数经常被用于表示圆环上的解析函数，是包含了正负次幂的级数。考虑在圆环域 $Q : R_1 < |z - z_0| < R_2$ 的解析函数 $f(z)$ ，则函数必定在 Q 上有展开式：

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

洛朗级数 c_n 定义为：

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

C 也很好理解，指的是此圆环域内以 z_0 为中心做的任意简单闭曲线。洛朗级数对我们后续研究奇点很重要，之后会进一步对其性质进行解释。

Next

作为复分析的 P1，本文内容量并不大，虽然字数差不多但都是一些基础中的基础（亦称皮毛，但是很重要），之后我可能也会类似地 适当在微信平台减少单篇文章的内容（写文章的时间和速度不变）。这是因为之前有不少读者跟我反映单篇文章内容太多，以及从我自身出发，在太长的时间跨度中写同一篇东西的确会多少让我失去兴趣，这是不好的。

还有，由于我写文章的时间点很离散，经常 记忆错乱地 心血来潮地 写点不合乎顺序的东西，而为我们写的说明，我经常想在以正式的 PDF 发到 Blog 上时去掉。因此我之后可能会选择以同样的精力投入，在微信减少单篇文章内容，以及在一定的进度后将文章以有目录的 PDF 的形式发到 Blog 上，篇章号不变（例如两篇微信文章 xxx I 和 xxx II 合并，在博客编号则会是 xxx I-II）

简单点说，就是我要把微信当成文章草稿库，爱发多发。把文章整理好，完善，废话说明都去掉，再扔到博客。

至于复分析基础文章的后续，应该重点就是共形映射、傅里叶变换、复积分这三兄贵，由于理论交叉来交叉去，“说完这又要扯那”的很麻烦，我还是得斟酌一下后续内容的组织。

引用资料

写完才发现我好像也没参考什么，仅列点曾用的教材（一般概念可以参考 Wiki）：

1. Lars V. Ahlfors. *Complex ANALYSIS*
2. 钟玉泉 《复变函数论》

月底一摸，看看我能不能在这里钓到点中学理科的大佬来给我爆补物化。

Ouyang Anqiao 01:36 13/04/2024

gzanqiao@hotmail.com